CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

2.1 Crecimiento económico

El crecimiento económico es el aumento sostenido del producto en una economía. Usualmente se mide como el aumento del Producto Interno Bruto (PIB) real en un período de varios años o décadas (Larraín y Sachs, 2004). Si hay crecimiento económico en un país quiere decir que han mejorado las condiciones de vida del individuo promedio, es por esto que para muchos economistas a resultado de gran interés este tema.

Actualmente es común escuchar de crecimiento económico, sin embargo es un concepto relativamente reciente. El crecimiento económico sostenido se ha dado en los últimos siglos antes el crecimiento fue nulo o muy bajo. La tasa media de crecimiento de los países industrializados durante el siglo XX fue superior a la del siglo XIX, y la de este mayor que la del siglo XVIII (Romer, 2006). Aunque es importante mencionar que el crecimiento no se ha dato de manera equitativa en todos los países.[1]

Ante estos datos surgen varias preguntas ¿qué provocó el aumento sostenido del crecimiento económico? ¿Por qué algunos países o regiones se desarrollan que otros? ¿Las diferencias en crecimientos entre países van a aumentar o disminuir con el tiempo? Estas preguntas fueron abordadas inicialmente entre países, pero actualmente también es una preocupación regional, saber si dentro de un país las regiones tienden a aumentar o disminuir sus diferencias en bienestar y riqueza. Desde hace mucho tiempo los economistas se han cuestionado cuales son las fuentes del crecimiento y han dejado sus aportaciones, que hasta la fecha se usan. Por ejemplo de los economistas clásicos podemos mencionar a Adam Smith, David Ricardo, Thomas Maltus que introdujeron conceptos como la relación entre el progreso tecnológico y la especialización del trabajo y los rendimientos decrecientes y su relación con la acumulación de capital físico. También tenemos a los clásico del siglo XX como, Frank Ramsey, Allwyn Young, Frank Knight y Joseph Shcumpeter su contribución fueron los determinantes de la tasa de crecimiento y del

---

[1] Por ejemplo “La renta real media de Estados Unidos, Alemania y Japón es alrededor de veinte veces mayor que la de Bangladesh o Kenia (Rommer, 2006).

progreso tecnológico. En la segunda mitad del siglo XX aparecieron los neoclásicos, sus trabajos eran modelos matemáticos que buscan explicar el crecimiento económico. Uno de los primeros trabajos que tuvo esta característica fue el de Solow (1956).

Aún continúa el debate para determinar cuáles son las fuentes que determinan el crecimiento, cada año surgen nuevas teorías e investigaciones sin embargo se ha podido identificar ciertos factores importante. La base fundamental en cuanto a teorías de crecimiento económico ha sido el modelo de Solow (1956), conocido también como modelo neoclásico de crecimiento. A pesar de las limitaciones que pude presentar (que se verán más adelante) es el punto de referencia y comparación de otros modelos.

De manera breve se abordara el modelo de crecimiento neoclásico de Solow, el cual pretende mostrar cómo interactúan el crecimiento del stock de capital, el crecimiento de la población activa y los avances de la tecnología en una economía y cómo afecta a la producción total de bienes de un país.

2.2 Fundamentos básicos del Modelo de Solow

El modelo neoclásico, desarrollado independientemente por Solow (1956) y Swan (1956), suele ser el punto de partida para la mayoría de los análisis del crecimiento económico, pues la hipótesis y las implicaciones de dicho modelo se utilizan como referencia. Este modelo trata de explicar las fuentes de crecimiento económico.[2]

El modelo de Solow muestra que la acumulación de capital físico no puede sostener por sí sola el crecimiento. Dados los rendimientos decrecientes del capital, para mantener un aumento constante de la producción por trabajador es necesario aumentar cada vez más el capital por trabajador. Llega un momento en el que la sociedad no está dispuesta a ahorrar más (una proporción mayor del ingreso) e invertir lo suficiente para mantener el crecimiento del capital. Por tal razón, una de las principales conclusiones del modelo de Solow es que, si bien la acumulación de capital físico es un factor importante en el crecimiento, no puede explicar el notable aumento del producto por persona experimentado

[2] Solow planteó un modelo de claras implicaciones neoclásicas, en el que los planes de ahorro e inversión se cumplen de forma simultánea y los mercados se vacían siempre, de forma que el desempleo keynesiano no resulta significativo (un supuesto que parecería razonable en el largo plazo). Solow también supuso que existe una función de producción lineal y homogénea (en logaritmos), y que hay sustituibilidad entre el capital y el trabajo. Por otro lado, postuló que la relación ahorro e ingreso es una constante, lo que puede considerarse como un vestigio keynesiano en el contexto de un modelo neoclásico (Carrillo *et. al.*, 2007).

a lo largo del tiempo por la mayoría de los países occidentales, ni las enormes diferencias observadas en el producto por persona entre los distintos países

El modelo de solo se basa en una función de producción agregada con dos factores de producción el capital físico, K(t), y el trabajo, L(t).[3] La función de producción toma la forma:

$$Y(t) = F[K(t), L(t), t], \qquad (2.1)$$

Donde la producción depende del tiempo reflejando el efecto del progreso tecnológico, ya que la tecnología va avanzando con el tiempo. *Y(t)* representa la producción en el momento t, la cual se puede consumir, *C(t)*, o puede ser invertida, *I(t)*, para tener mayor capital. El modelo considera las siguientes consideraciones:

- Se considera una economía cerrada por lo tanto la producción es igual al ingreso, y la cantidad invertida es igual a la cantidad ahorrada.
- La tasa de ahorro "*s*" es exógena, $0 \leq s \leq 1$, no puede ser mayor a uno ya que lo más que se puede ahorrar es todo el ingreso.
- La tasa de depreciación del capital es constante, esto es que cada año se deprecia la misma cantidad de capital, δ > 0.
- La tasa de crecimiento de la población es exógena y constante $\dot{L}/_L = n \geq 0$, además asumiremos que la población es igual a la fuerza laboral y todos trabajan con la misma intensidad. La población y la fuerza de trabajo está determinada en un momento t por: $L(t) = e^{nt}$.

El incremento neto en el stock de capital físico en un momento del tiempo es igual a la inversión menos la depreciación:

$$\dot{K} = I - \delta K = s \cdot F(K, L, t) - \delta K \qquad (2.2)$$

La ecuación (2.2.) muestra la dinámica del capital. El lado izquierdo de la ecuación indica la derivada de K con respecto al tiempo, $\dot{K}$ es una manera abreviada de expresar

[3] También se considera dentro de esta función de producción al factor tecnológico (A), el cual se supone constante.

$dX(t)/dt$. Primero vamos a dejar fuera el progreso tecnológico (es decir $F(\cdot)$ es independiente de t), más adelante lo incorporamos al modelo. Esta ecuación determina la pauta de crecimiento en el tiempo del capital, K, y la producción, Y. Si dividimos ambos lados de la ecuación por L obtenemos la ecuación (2.3).

$$\dot{K}/L = s \cdot f(k) - \delta k \qquad (2.3)$$

Ahora tenemos el stock de capital *per capita*. Sin embargo el lado derecho de la ecuación no está en términos *per capita*. Podemos arreglarlo si escribimos $\dot{K}/L$ como función de k usando la condición:

$$\dot{k} \equiv \frac{d\left(K/L\right)}{dt} = \dot{K}/L - nk \qquad (2.4)$$

Donde $n = \dot{L}/L$, si substituimos la ecuación 2.4 en la 2.3 tenemos la ecuación (2.5)

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (n + \delta) \cdot k \qquad (2.5)$$

Esta vez tanto el lado izquierdo como derecho de nuestra ecuación está en función de k (el capital *per capita*), a la ecuación 2.5 se le llama la ecuación fundamental de Solow, la cual permite saber cómo cambia el stock de capital *per capita* en el tiempo.

2.2.1 Función de producción Neoclásica (Cobb-Douglas)

El modelo de Solow considera la función de producción agregada de la ecuación 2.1. Esta función de producción, de carácter neoclásica cumple con las siguientes tres propiedades (Barro y Sala-i-Martin, 1995):

1) La productividad marginal de todos los factores de producción es positiva, pero decreciente.

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \qquad (2.7)$$

Las ecuaciones 2.6 y 2.7., indican que si se aumenta el número de maquinas, sin cambiar el número de trabajadores, la producción va a aumentar pero cada vez en una menor proporción.

2) La función de producción tiene rendimientos constantes a escala, lo que significa que si se duplica la cantidad de capital y trabajo, el nivel de producción también se duplica. [4]

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda \cdot F(K, L) \qquad \text{para toda } \lambda > 0 \qquad (2.8)$$

3) La productividad marginal del capital se aproxime a cero cuando el capital tiende a infinito y que tienda a infinito cuando el capital se aproxima a cero. Esta última propiedad es llamada *condiciones de Inada*.

$$\lim_{K \to 0}(F_K) = \lim_{L \to 0}(F_L) = \infty \qquad (2.9)$$

$$\lim_{K \to \infty}(F_K) = \lim_{L \to \infty}(F_L) = 0 \qquad (2.10)$$

Una función de producción sencilla que satisface las condiciones neoclásicas antes mencionadas es la Cobb-Douglas:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad (2.11)$$

Donde A es una constante positiva y α es una fracción positiva. Vamos a comprobar que esta función cumple con las propiedades de una función neoclásica. De la primera propiedad vemos que los productos marginales del capital y del trabajo son positivos ya que la primera derivada es positiva.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} > 0 \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{\ \alpha} > 0 \qquad (2.13)$$

Además, la segunda derivada es negativa por lo que este producto marginal es decreciente.

[4] No se duplica la tecnología A, ya que es un bien no rival. Un bien no rival puede ser utilizado por más de un usuario a la vez. La tecnología o conocimiento puede ser usado por más de una persona a la vez, por ejemplo una receta o una fórmula para preparar algo. Por otro lado el capital y el trabajo son bienes rivales, ya que si una persona usa una maquina no puede usarla otra persona al mismo tiempo, también una persona no puede estar en dos trabajos al mismo tiempo.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0 \qquad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = (1-\alpha)(-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha-1} < 0 \qquad (2.15)$$

De la segunda propiedad vemos que la función de producción Cobb-Douglas tiene rendimientos constantes a escala.

$$A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \lambda Y \qquad (2.16)$$

Finalmente se cumple la tercera propiedad respecto a las condiciones de Inada

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial y}{\partial k} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = 0, \qquad \lim_{K\to 0}\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \infty \qquad (2.17)$$

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\partial y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = 0, \qquad \lim_{L\to 0}\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = \infty \qquad (2.18)$$

Concluimos que la función de producción Cobb-Douglas satisface las condiciones de una función neoclásica.

2.2.2 Ecuación fundamental de Solow y el estado estacionario

Consideramos la ecuación fundamental de Solow (ecuación 2.5), la cual indica cómo cambia el capital a través del tiempo e indica cuál será el incremento del stock de capital *per capita* en el próximo instante.[5] La primera parte del lado derecho corresponde a la inversión por trabajador, s es una fracción positiva que multiplica a la función de producción, entre mayor sea el ahorro mayor será la inversión en capital. El segundo término explica por qué puede disminuir el stock de capital por persona. El capital disminuye porque este se deprecia a la tasa δ y también por aumentos de la población que hacen que haya menor capital por persona.[6]

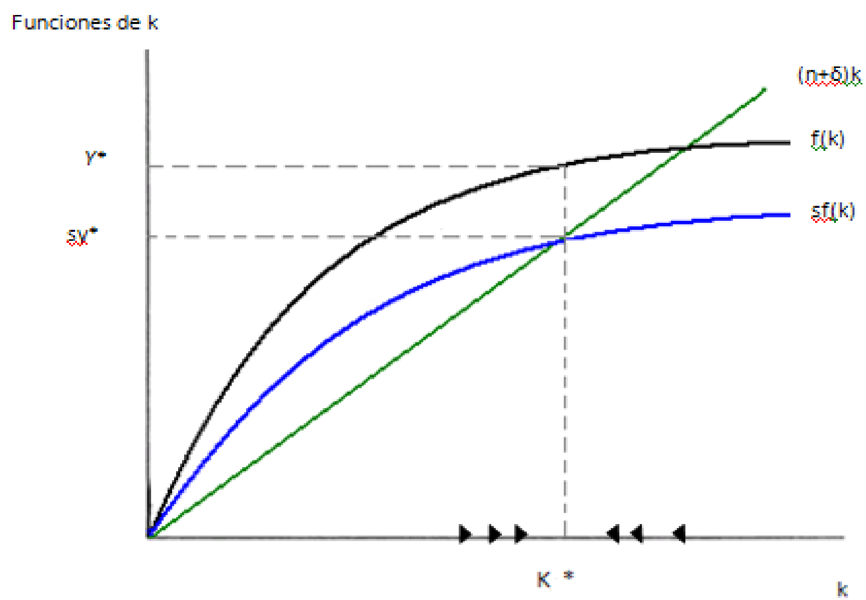
---

[5] Un punto encima de una variable denota la derivada de la variable con respecto al tiempo.

[6] Podemos observar que en la ecuación fundamental de Solow está en función del capital por trabajo efectivo, que es capital por trabajo efectivo. Para trazar la función de producción *f(x)* nos basaremos en las propiedades de una función de producción neoclásica, mencionadas anteriormente. Debido a que la productividad marginal del capital debe ser positiva pero decreciente, la curva f(x) es una curva creciente y cóncava. Además, de acuerdo a las condiciones de Inada cuando el capital es cero, la curva es vertical ya que la pendiente es infinita (Carrillo *et. al.* 2007).

Por otro lado, cuando el capital tiende a infinito la curva se hace horizontal ya que su pendiente se aproxima a cero, por lo tanto la curva *f(x)* toma la forma que se muestra en la Gráfica 2.1. El ahorro al ser una proporción s menor que 1 de la función de producción, se encuentra por debajo de *f(x)* y la llamamos *curva de ahorro*. Finalmente el término $(n+\delta)\cdot k$ se representa con la línea recta que parte del origen y tiene pendiente (n+δ), se le llama *curva de depreciación.*

Gráfico 2.1 El estado estacionario en el modelo de Solow-Swan



En el estado estacionario, donde gráficamente se cruzan las curvas de ahorro y depreciación (ver Gráfica 2.1), $\dot{k}=0$ es decir el incremento del stock de capital por persona es igual a cero.

$$0 = s\cdot f(k) - (n+\delta)\cdot k$$

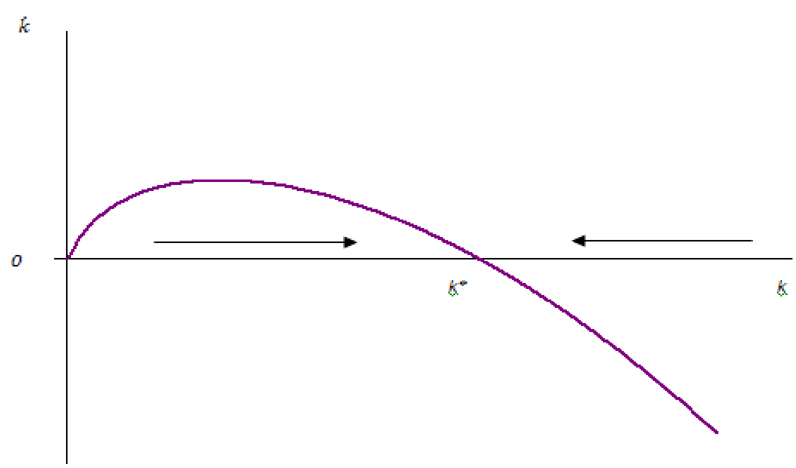
$$s\cdot f(k) = (n+\delta)\cdot k \qquad (2.19)$$

Es decir en el estado estacionario la inversión realizada es justo la necesaria para cubrir la depreciación, por lo que no aumenta el capital por persona. Si k es constante en el estado estacionario, la producción *y* y el consumo c también son contantes $y* = f(k*)$ y

$c* = (1-s)\cdot f(k*)$.[7] Por lo tanto, en el modelo neoclásico, las cantidades *per capita* de *k*, *y* y *c* no crecen en el estado estacionario. Sin embargo sus correspondientes valores agregados K, Y y C, crecen en el estado estacionario a la tasa de crecimiento de la población, *n*.[8]

En la Gráfica 2.2 se muestra el comportamiento de *k* en el tiempo. De acuerdo con la ecuación fundamental de Solow, si inicialmente la inversión por trabajador es mayor que la inversión de reposición *k* aumenta: si es inferior, por el contraria k disminuye. Es decir, cualquiera que sea el nivel de capital con el que comience, acabará teniendo el nivel de capital correspondiente al estado estacionario (Mankiw, 2004).[9]

Gráfico. 2.2. El diagrama de fase de k en el modelo de Solow



[7] El consumo es la proporción de la producción que no se ahorra, si la tasa de ahorro es s, la proporción que se consume es (*1-s*), multiplicado por la producción f(x).
[8] Para que se siga manteniendo el nivel de stock de capital *per capita* a pesar de que aumenta la población, el capital K tiene que crecer a la tasa *n*.
[9] La Gráfica 2.2. muestra que si estamos a la izquierda del estado estacionario la curva de ahorro *per capita* es mayor que la depreciación por lo que con el tiempo aumentara el capital por persona y la economía se moverá hacia el punto *k**, por el contrario si estamos a la derecha del estado estacionario, la curva de depreciación es mayor que la de ahorro por lo que el capital va a disminuir y nos acercaremos al punto *k** (Carrillo *et. al.* 2007).

2.2.3 Regla de oro de la acumulación de capital

Se le llama Regla de oro de acumulación de capital al estado estacionario que conlleva el mayor nivel de consumo *per capita* (Sala i Martin, 2000). El aumento del bienestar de las personas depende del aumento en su consumo y esto se puede lograr a través de aumentos de la tasa de ahorro, la pregunta es ¿qué tasa de ahorro nos llevará al nivel de capital de oro, k_{oro}, y por lo tanto al consumo de oro, c_{oro}?.

Podemos encontrar una respuesta algebraica. Primero hay que notar que el ahorro es igual a la producción menos el consumo y sustituirlo en la ecuación fundamental de Solow de estado estacionario.

$$s \cdot f(k*) = (n + \delta) \cdot k*$$

$$f(k*) - c = (n + \delta) \cdot k*$$

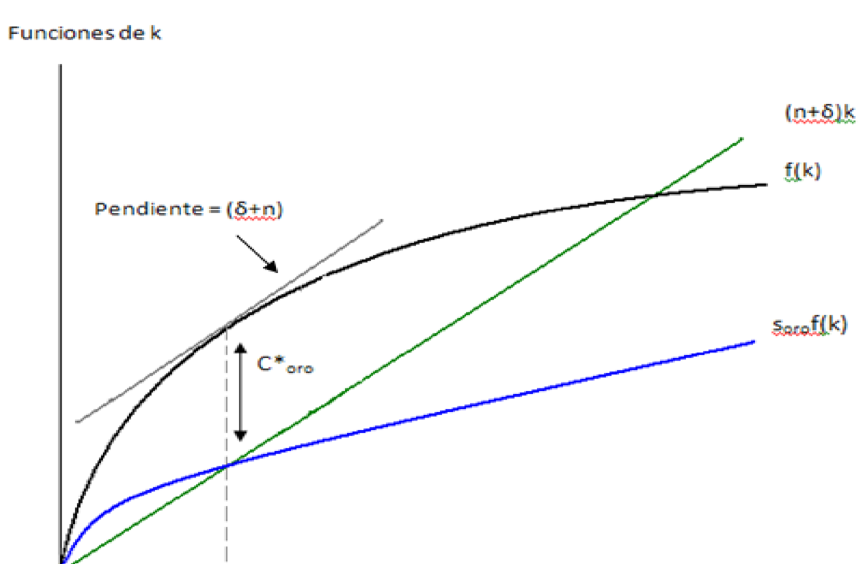
$$0 = f(k*) - c - (\delta + n)k^* \rightarrow c* = f(k^*) - (\delta + n)k^* \qquad (2.20)$$

De la ultima ecuación podemos ver que el consumo en estado estacionario es igual a la producción menos la depreciación, gráficamente el consumo corresponde a la diferencia entre la función de producción y la línea de depreciación. Para encontrar el nivel de capital de oro k_{oro}, se deriva la función de consumo con respecto al capital y tenemos:

$$\frac{dc^*}{dk^*} = f'(k^*) - (\delta + n) = 0 \rightarrow f'(k_{oro}) = \delta + n \qquad (2.21)$$

La ecuación indica que el consumo de la regla de oro se encuentra donde la pendiente (primera derivada) de la función de producción sea igual a la pendiente de la línea de depreciación, se puede entender más fácilmente de forma gráfica. En el gráfico 2.3 se muestra el punto k_{oro}.

Gráfico 2.3. La regla de oro de la acumulación del capital.



El punto k_{oro} corresponde a la mayor distancia entre la función de producción y la línea de depreciación, por lo tanto es el consumo máximo. Podemos ver que en este punto la pendiente de la línea de depreciación y de la función de producción son paralelas.

2.2.4 Transición dinámica

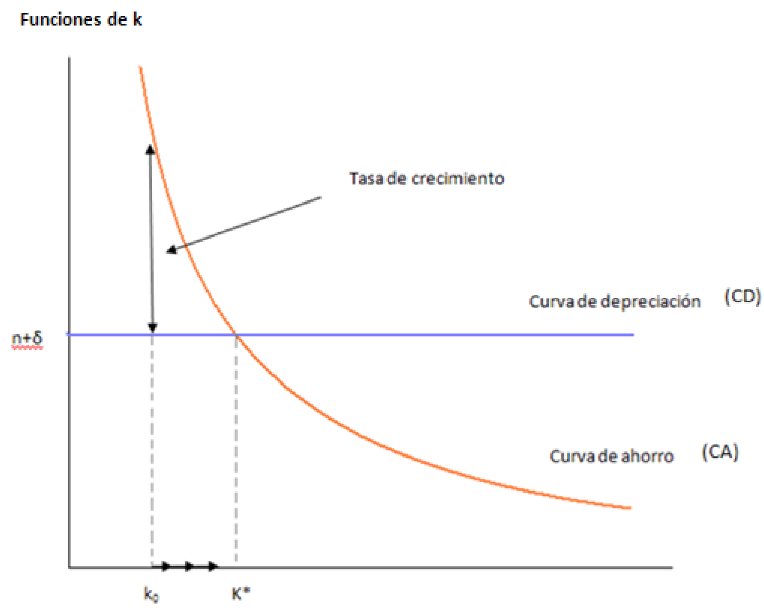
Para hacer el análisis de las tasas de crecimiento a través del tiempo necesitamos un nuevo gráfico. Si el producto *per capita* es proporcional al capital *per capita* y el consumo *per capita* es proporcional al producto *per capita*, por lo tanto si se sabe cómo se comporta en el tiempo la tasa de crecimiento del capital *per capita*, y por lo tanto, se sabe cómo se comporta la tasa de crecimiento del producto y consumo *per capita*. Al dividir la ecuación fundamental de Solow por el capital se obtiene la tasa de crecimiento del capital.

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k, A)}{k} - (\delta + n) \qquad (2.22)$$

El lado izquierdo representa la tasa instantánea de crecimiento del capital per cápita, del lado derecho seguiremos llamándole curva de ahorro y depreciación, la tasa de crecimiento está dada por la diferencia entre estas dos. De la ecuación 2.22 se puede obtener las siguientes conclusiones: cuanto mayor sea la tasa de ahorro mayor será el crecimiento, cuanto mayor sea el nivel tecnológico mayor será el crecimiento y si es mayor la tasa de depreciación menor será el crecimiento.

En la Gráfica 2.4 se observa la curva de ahorro, CA, la cual es proporcional a la producción por lo que tienen las mismas características. Como se observó en la ecuación 2.22, $n+\delta$ son independientes de k, por lo que es constante y su presentación gráfica es una línea horizontal, la llamamos curva de depreciación (ver Gráfica 2.4). Sabemos que la curva de ahorro va de cero a infinito y que la curva de depreciación tiene un valor constante por lo que ambas se deben de cruzar sólo en un punto, que corresponde al estado estacionario, k*.[10]

Gráfico 2.4. Dinámica de transición en el modelo neoclásico de Solow



Si inicialmente tenemos k_0 inferior a k^*, como en la gráfica 2.4, la curva de ahorro es mayor que la de depreciación por lo que la economía crece, entre más alejado este k de k^* mayor es la tasa de crecimiento, esto se debe a que los rendimientos del capital son decrecientes, si el stock de capital es bajo un pequeño incremento en capital genera una mayor producción.[11]

2.2.5 Velocidad de convergencia

[10] De acuerdo a la ecuación presentada anteriormente la tasa de crecimiento está determinada por la diferencia vertical entre la curva de ahorro $s\frac{f(k,A)}{k}$ y la curva de depreciación $(\delta + n)$.

[11] A medida que aumenta el stock de capital se tiene que cubrir una mayor depreciación por lo que la producción va disminuyendo hasta llegar a k^*, en este punto el aumento del stock de capital sólo cubre el aumento de la población n y la depreciación. Por otro lado si k es mayor a k^* la tasa de depreciación es mayor a la de ahorro por lo que el capital va disminuyendo hasta llegar a k^*. En conclusión no importa el punto inicial donde se encuentre la economía siempre va a llegar a k^*.

Otro punto importante del modelo de Solow es determinar con qué rapidez la economía evoluciona hacia el estado estacionario. Necesitamos determinar a qué ritmo se acerca *k* a *k**. Sin embargo, primero vamos a presentar como es la tasa de crecimiento del capital con una función de producción Cobb-Douglas, para lo cual se usa de nueva cuenta la ecuación 2.22, la cual representa la tasa instantánea de crecimiento del capital *per capita* y sigue estando en función del ahorro y la depreciación.

La primera parte del lado derecho, de la ecuación (2.22) corresponde a la tasa de ahorro multiplicada por el producto medio del capital, en el caso de una función Cobb-Douglas este producto medio es igual a $f(k,A) = Ak^{\alpha-1}$ (Sala-i-Martin, 2000). Por lo que la tasa de crecimiento del capital sería:

$$\gamma_k = sAk^{-(1-\alpha)} - (\delta + n) \qquad (2.23)$$

Ahora hacemos que la tasa de crecimiento esté en función de *log(k)* y no de k. Entonces tenemos que:

$$\gamma_k = sAe^{-(1-\alpha)\log(k)} - (\delta + n) \qquad (2.24)$$

El único cambio es que reescribimos $Ak^{-(1-\alpha)}$ como $Ae^{-(1-\alpha)\log(k)}$. La velocidad de convergencia es el cambio en la tasa de crecimiento cuando el capital aumenta en un uno por ciento, esta definición la podemos representar matemáticamente como:

$$\lambda = -\frac{\partial \gamma_k}{\partial \log(k)} \qquad (2.25)$$

Donde λ representa la velocidad de convergencia, *k* es el capital por unidad de trabajo efectivo y γ_k la tasa de crecimiento del capital por persona que determinamos en la ecuación 2.24. Inicialmente no estamos incluyendo el progreso tecnológico. De acuerdo a Sala-i-Martin (2000), si derivamos 2.25 con respecto a log(k) obtenemos la ecuación.

$$\lambda^* \equiv (1-\alpha)(\delta + n) \qquad (2.26)$$

Si tomamos en cuenta la tecnología en la velocidad de convergencia el resultado no cambia mucho, en la ecuación solo agregamos *g* (Romer, 2006) y como resultado se obtiene la ecuación (2.27).

$$\lambda^* \equiv (1-\alpha)(\delta + g + n) \qquad (2.27)$$

Que es la velocidad de convergencia. Es importante la determinación de la velocidad de convergencia ya que diferencias aparentemente leves en las tasas de crecimiento anual pueden tener un fuerte impacto sobre el nivel de ingreso *per capita* en un periodo prolongado. La velocidad de convergencia indica el porcentaje que se cubre anualmente de la diferencia existente entre el capital inicial y el capital de estado estacionario.[12]

2.2.6 La Convergencia en el Modelo de Solow

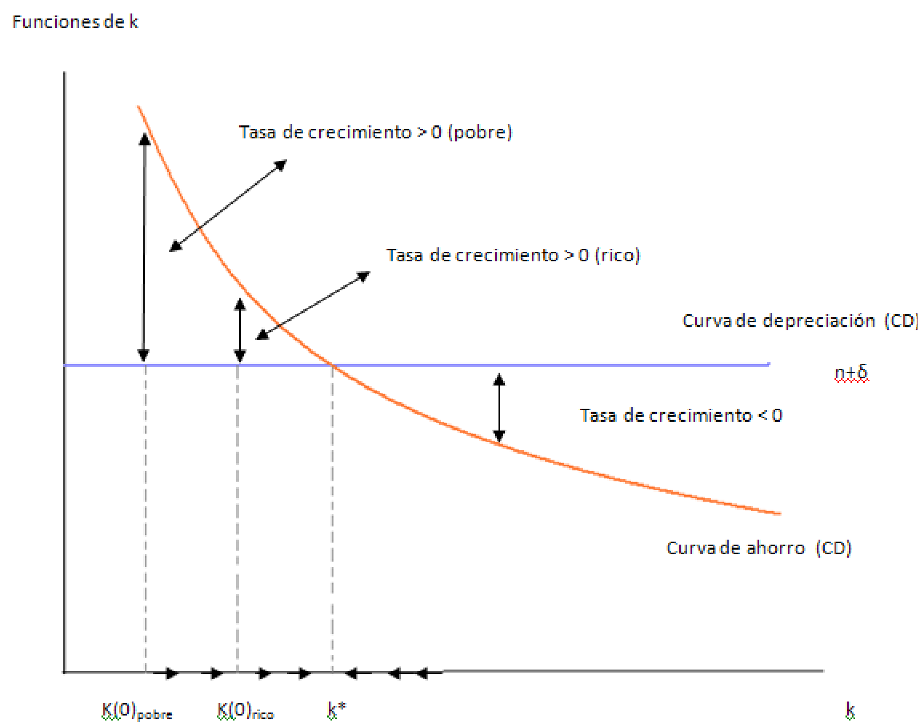
Del gráfico 2.4 se puede concluir que a mayor distancia de k* mayor es la tasa de crecimiento y que no importa el valor inicial de k siempre se converge hacia el estado estacionario. En el mundo real se observa que un crecimiento superior en las economías pobres que en las ricas ya que las primeras tienen un nivel muy bajo de k (se encuentran alejadas de k*). Lo anterior, se conoce como la hipótesis de convergencia, sin embargo hay que tener cuidado, supone que la única diferencia entre los países es el stock de capital por trabajador y son iguales en los otros parámetros (n, g y δ). También podemos deducir la hipótesis de convergencia de la ecuación (2.22).

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k,A)}{k} - (\delta + n) \qquad (2.28)$$

La tasa de crecimiento del capital k está inversamente relacionada con el nivel de k. Como la tasa de crecimiento de la renta *per capita* es proporcional a la tasa de crecimiento del capital *per capita* entonces la tasa de crecimiento del producto *per capita* también esta inversamente relacionado con el nivel de renta inicial. En el gráfico 2.5 se muestra la convergencia absoluta.

[12] De acuerdo a Carrillo, et al 2007, la ley de Hierro de la Convergencia de cuerdo a Barro, 1996; Sala i Martín, 1996, Cogley y Spiegel, 1998 y De la Fuente, 2000, afirman que a la tasa de convergencia para países y regiones generalizadas es del 2% por año. Sin embargo, existen autores que a partir de evidencias regionales demuestran su inexistencia universal (Esquivel, 1999) y críticas como la de Quah (1993) que establecen que es estimación del 2% está sesgada debido a que es resultado de un proceso de raíz unitaria.

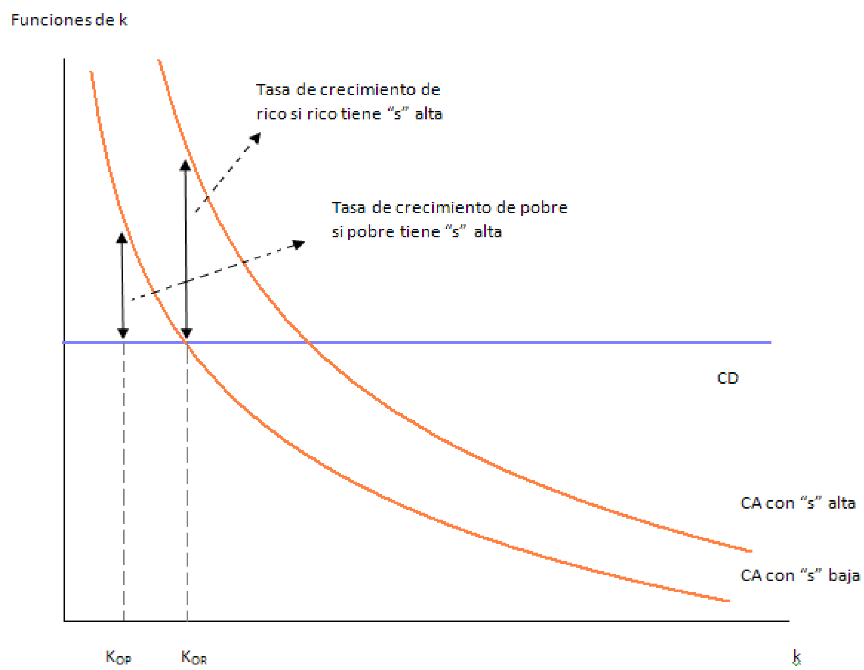
Gráfica 2.5. La convergencia absoluta



En el Gráfico (2.5) representa a un país rico y otro pobre con los mismos valores de n, s y δ, así que su dinámica está determinada por las mismas curvas de ahorro (CA) y depreciación (CD) y la misma función de producción, la única diferencia entre las economías es la cantidad inicial de capital *per capita* (Carrillo *et. al.*, 2007). Para que se dé la convergencia las economías pobres tenderán a crecer en términos *per capita*, a tasas más altas que las economías más avanzadas. Finalmente en el largo plazo ambas llegarán a k*.

En el mundo real es difícil observar que la única diferencia entre los países sea su nivel de stock de capital por trabajador, algunos países tienen mayor progreso tecnológico (A) que otros, algunos ahorran más, la tasa de crecimiento de la población es distinta, etc. Por ejemplo en la Gráfico 2.6, se representan dos países uno pobre y el otro rico, podemos observar que la curva de ahorro del pobre es inferior a la del rico por lo tanto tienen distintos estados estacionarios. Además el primero tiene un nivel de capital inferior al segundo ($k_{0P} < k_{0R}$).[13]

Gráfico 2.6. Convergencia condicional



En la realidad los países pueden diferir en sus parámetros exógenos, sin embargo eso no influye en la predicción del modelo de Solow de que los países deben de converger hacia sus estados estacionarios, sólo que ahora los países convergen hacia distintos puntos, a esta hipótesis se le conoce como convergencia condicional.

2.2.7 Ecuación de convergencia absoluta y condicional

[13] Entonces tenemos un gran problema porque el modelo ya no puede predecir convergencia. Sin embargo podemos hablar de convergencia condicional, es decir que la tasa de crecimiento de una economía está directamente relacionada con la distancia a la que se sitúa de su estado estacionario, un menor valor inicial del ingreso *per capita* real tiende a generar una tasa de crecimiento *per capita* más alta. Supongamos que existe un país pobre y esperamos que en el largo plazo sea rico, eso quiere decir que se encuentra alejado de su estado estacionario y por lo tanto la tasa de crecimiento es muy elevada. Por otro lado si es un país pobre y esperamos que en el largo plazo siga siendo pobre, es porque no se encuentra muy alejado de su estado estacionario y su tasa de crecimiento será menor (Sala i Martin, 2000).

En esta sección vamos a aplicar la función de producción Cobb-Douglas en el modelo de Solow, de acuerdo con Yao Yudong y Melvyn Weeks (2000). Primero supongamos una función de producción Cobb-Douglas donde (Y) representa la producción, asumimos retornos constantes a escala y tenemos tres *inputs* (A) progreso tecnológico, (K) capital y (L) trabajo.

$$Y(t) = K(t)^{\alpha}(A(t)L(t))^{1-\alpha} \qquad (2.29)$$

La fuerza de trabajo y el crecimiento tecnológico son tasas constantes y exógenas.

$$L(t) = L(0)e^{nt} \qquad (2.30)$$

$$A(t) = A(0)e^{gt} \qquad (2.31)$$

Donde: g es la tasa de progreso tecnológico y n es la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo; A(0) es el estado inicial de la tecnología; L(0) es el estado inicial de la fuerza de trabajo. Si nombramos $y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}$ como el producto por unidad de trabajo efectivo y a $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$ como la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo, entonces $y(t) = f(k(t)) = k(t)^{\alpha}$, donde la evolución del capital está dada por:

$$\dot{k}(t) = sk^{\alpha}(t) - k(t)(n + g + \delta) \qquad (2.32)$$

Donde δ es la tasa de depreciación del capital y s es la tasa de ahorro. El capital está sujeto a retornos marginales decrecientes. El estado estacionario del capital se puede encontrar igualando a cero la ecuación (2.32).

$$k^{*}(t) = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (2.33)$$

Si se sustituye la ecuación (2.33) en la función de $y(t)=k(t)^{\alpha}$, se puede obtener el estado estacionario del producto por unidad de trabajo efectivo, que en su forma logarítmica se escribe como:

$$\ln y^{*} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)[\ln s - \ln(n + g + \delta)] \qquad (2.34)$$

La tasa de convergencia, λ denota la tasa a la cual el producto por unidad de trabajo efectivo se aproxima a su estado estacionario, dado por

$$\frac{d \ln y(t)}{dt} = \lambda\left[\ln(y^*) - \ln y(t)\right] \qquad (2.35)$$

Donde $\lambda = (1\text{-}\alpha)(n\text{+}g\text{+}\delta)$. La solución a la ecuación diferencial anterior es

$$\ln y(t_2) = (1-\zeta)\ln y^* + (1-\zeta)\ln y(t_1) \qquad (2.36)$$

Donde $\zeta = e^{-\lambda\tau}$ y $\tau = (t_2 - t_1)$. En el presente caso y* está determinada por s y n, las cuales son asumidas como constantes para el periodo de tiempo t_1 y t_2, y de ahí que también representan el valor para el año corriente. Necesitamos trabajar con el ingreso *per capita,* por lo tanto, reformulamos la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\ln y(t) = \ln\left(\frac{Y(t)}{A(t)L(t)}\right) = \ln\left(\frac{Y(t)}{A(t)e^{gt}L(t)}\right)$$

O

$$\ln y(t) = \ln\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right) - \ln A(0) - gt \qquad (2.37)$$

Si sustituimos la expresión por lny(t) en la ecuación (2.36) y sustraemos $\ln y(t_1)$ en ambos lados, obtendremos una expresión para la producción *per capita* en el periodo t_2-t_1:

$$\begin{aligned}\ln y(t_2) - \ln y(t_1) = &-(1-\zeta)\ln y(t_1) \\ &+ (1-\zeta)\ln A(0) + g(t_2 - \zeta t_1) \\ &+ (1-\zeta)\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - (1-\zeta)\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta) \qquad (2.38)\end{aligned}$$

El modelo de Solow de la ecuación (2.38) se enfoca a la transición dinámica de crecimiento de una economía hacia su estado estacionario de ingreso. Donde $\beta = -(1-\zeta)$ y la velocidad de convergencia está dada por[14]:

[14] Los economistas usan una regla fácil, llamada la *regla del 70,* la cual establece que cuando la tasa de crecimiento es de un cierto X% anual, toma aproximadamente 70/X años duplicar el ingreso (Larraín y Sachs, 2004). Por ejemplo si un país tiene un crecimiento de 2% al año, tomará 35 años duplicar el ingreso. De

$$\lambda = -\frac{\ln(\beta+1)}{\tau} \qquad (2.39)$$

La ecuación 2.38 es de convergencia absoluta y una forma más corta de representarla es como:

$$Iny_i(t_2) - Iny_i(t_1) = a + \beta y_{i,t} + u_i \qquad (2.40)$$

Donde i = 1,……, N denota cada región, $Iny_i(t_2) - Iny_i(t_1)$ es la tasa de crecimiento del PIB *per capita* para la región i en el periodo de tiempo t_2-t_1, mientras que $y_{i,t}$ es el nivel inicial de PIB *per capita* y "a" es el intercepto formado por:

$$a = (1-\zeta)\ln A(0) + g(t_2 - \zeta t_1)$$
$$+ (1-\zeta)\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - (1-\zeta)\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta) \qquad (2.41)$$

Donde "a" es una suma del efecto de ahorro, crecimiento de la población, tecnología inicial A (0); y la tasa exógena de cambio tecnológico (g). Se puede observar que en la ecuación (2.40) el parámetro β_1 indica si se presentó un proceso de convergencia o de divergencia. El β_1 es positivo constituye evidencia de que los estados más ricos crecieron a tasas mayores y no se presenta ningún tipo de convergencia. Si β_1 es negativo, ello implica que los estados con mayores niveles de producto *per capita* crecieron a menores tasas que aquellos con menores niveles de producto, siendo la principal evidencia de que la brecha relativa entre estados se cierra, es decir, hay convergencia.[15]

La ecuación de convergencia condicional se puede obtener al modificar la ecuación (2.38) de convergencia absoluta:

---

acuerdo a Carrillo *et. al.,* (2007) la ecuación de la convergencia en el modelo de Solow es $log[y(t)] = (1-e^{-\lambda t})\log(y^*) + e^{-\lambda t}\log[y(0)]$. El tiempo t para el cual $log[y(t)]$ está a una distancia media entre $log[y(0)]$ y log(y*), satisface la condición de que $e^{-\lambda t}=1/2$. La vida media de la convergencia (el tiempo que toma eliminar la mitad de las brechas de ingreso *per capita* entre regiones o países) es entonces log(2)/λ=0.69/λ. Por tanto, si λ=0.07 por año, la vida media de la convergencia será de aproximadamente 10 años, por lo que mientras más alta sea la tasa, menor será el tiempo que las economías tarden en reducir las brechas entre ellas.

[15] Lo anterior lo podemos entender como si se tratara de una carrera. Si suponemos que hay un corredor que le lleva muchos metros de ventaja a otro, sin embargo, el primero ha bajado su velocidad, mientras que el segundo corre a una velocidad más alta, por lo tanto, sólo es cuestión de tiempo para que el corredor que va en segundo lugar alcance al primero.

$$(\ln y_i(t_2) - \ln y_i(t_1) = a + \beta y_{i.t} + \theta' x_i + u_i \qquad (2.42)$$

Donde x_i es un vector que incluye tasa de ahorro ln(s_i), tasa de crecimiento de la población, cambio tecnológico y depreciación, ln(n_i+g+δ), donde θ es el vector de los coeficientes. Por lo tanto, se modifica el intercepto "a" que ahora sólo se forma por:

$$a = (1-\zeta)\ln A(0) + g(t_2 - \zeta t_1) \qquad (2.43)$$

Si se compara con la ecuación de convergencia absoluta, se observará que sólo quitamos términos del intercepto para ponerlos como variables explicativas, ya que en convergencia condicional no existen los mismos parámetros para todas las economías.

2.3 β convergencia y σ convergencia

La sigma convergencia consiste en estudiar la desviación estándar del logaritmo del ingreso *per capita* real entre los países o regiones (Carrillo *et. al,* 2007). La desviación estándar es una medida que nos informa de la media de la distancia que tienen los datos respecto a su media aritmética. En otras palabras, nos muestra qué tan dispersas se encuentran las observaciones. La desviación estándar es la raíz cuadrada positiva de la varianza.[16]

β convergencia es una condición necesaria pero no suficiente para que ocurra la σ convergencia, para que las economías se acerquen es necesario que las pobres crezcan más que las ricas. Sin embargo cada una nos da diferente información. Por ejemplo, para un grupo de países podemos observar que hay beta convergencia ya que los más pobres crecen a tasas mayores que los más ricos. Sin embargo si el crecimiento en los países pobres no se expande hacia todos los sectores la desigualdad se mantiene. Por otro lado un país pobre puede crecer a tasas menores que una economía rica, es decir no hay convergencia beta, sin

---

[16] La varianza se calcula de la siguiente forma:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

La varianza de una muestra de medidas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es la suma de los cuadrados de las desviaciones entre las medidas y su media, dividida entre n-1 (Wackerly, Mendenhall y Scheaffer, 2002)

De la anterior se deriva la fórmula de la desviación estándar: $s = \sqrt{s^2}$. Por lo tanto la desviación estándar es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

embargo permite mejores condiciones de desarrollo para todas los sectores, entonces observaremos sigma convergencia (Carrillo *et. al,* 2007).

La relación entre β y σ convergencia también la podemos ver en ecuaciones. La ecuación de Barro para β convergencia, que anteriormente derivamos es:

$$\log(y_{i,t}) - \log(y_{i,t-1}) = a - \beta \log(y_{i,t-1}) + u_{it} \qquad (2.44)$$

Donde β es una constante positiva tal que $0 < \beta < 1$, un mayor coeficiente corresponde a una mayor tendencia hacia la convergencia, u_{it} es un término de perturbación, suponemos que tiene media cero, la misma varianza para todas las economías, σ^2_u , y es independiente en el tiempo y entre economías.

De acuerdo a Sala i Martin (2000), si sumamos $\log(y_{i,t-1})$ a ambos lados de la ecuación anterior, encontramos que la renta real *per capita* de la economía i puede aproximarse mediante la ecuación :

$$\log(y_{i,t}) = a + (1 - \beta)\log(y_{i,t-1}) + u_{it} \qquad (2.45)$$

Como medida de la dispersión tomamos la varianza muestral del logaritmo de la renta:

$$\sigma_t^2 = \left(1/_{n-1}\right)\sum_{i=1}^{N}\left[log(y_{i,t}) - \mu_t\right]^2 \qquad (2.46)$$

Si N es demasiado grande se puede aproximar a la ecuación poblacional

$$\sigma_t^2 = \left(1/_N\right)\sum_{i=1}^{N}\left[log(y_{i,t}) - \mu_t\right]^2 \qquad (2.47)$$

En esta podemos sustituir $\log(y_{i,t})$ (2.48) para tener la evolución de σ^2_t en el tiempo:

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta)^2 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \sigma_u^2 \qquad (2.48)$$

Es una ecuación en diferencia de primer orden, que es estable si $0 < \beta < 1$. Aquí podemos ver que β convergencia es una condición necesaria para la existencia de σ convergencia. Si no existe β convergencia, de modo que $\beta \leq 0$, no puede haber σ convergencia.

De acuerdo a Sala i Martín (2000), se puede considerar la ecuación (2. 51) en diferencias y expresar σ^2_t como función del tiempo para ver si también es una condición suficiente:

$$\sigma_t^2 = (\sigma^2)^* + [\sigma_0^2 - [(\sigma]^2)^*] \cdot (1-\beta)^{2t} \qquad (2.49)$$

Donde el valor de $(\sigma^2)^*$ es el valor de estado estacionario[17] de σ^2_t y viene dado por:

$$(\sigma^2)^* = \sigma_u^2 / [1 - ([1-\beta)]^2] \qquad (2.50)$$

De la ecuación anterior podemos concluir que la dispersión del estado estacionario disminuye cuando β aumenta, pero aumenta con la varianza de la perturbación, σ^2_u. Tanto σ como β convergencia son importantes ya que cada una nos proporciona información útil.[18]

2.4 Convergencia entre regiones

La convergencia interregional se recomienda usarla cuando se emplean datos regionales de distintos países para estudiar la convergencia regional de los ingresos *per capita.* En vez de estimar una regresión lineal se está estimando una no lineal (Carrillo, et al 2007):

$$\gamma_{i,t_0,t_0+T} = \alpha - \left[1 - e^{-\beta T}/_T\right] \cdot \log(y_{i,t_0,t_0+T}) + u_{i,t_0,t_0+T} \qquad (2.51)$$

Donde: γ_{i,t_0,t_0+T} es la tasa de crecimiento anual de la economía i entre los periodos t_0 y t_0+T y esta dada por $(1/T) log\left[y_{i,t_0} + {}^T/y_{i,t_0}\right]$. Por otro lado u_{i,t_0,t_0+T} representa el promedio de los términos de error, u_{it}, entre los momentos t_0 y t_0+T. Se prefiere la ecuación 2.51 porque cuenta con tres etapas de estimación:

1) El parámetro β nos da directamente la velocidad de convergencia de la economía.
2) El coeficiente del logaritmo del nivel de ingreso $b \equiv \left[1 - e^{-\beta T}/_T\right]$ es una función decreciente de la duración del periodo de estimación. Si se estima una ecuación de convergencia para un periodo de 110 años con una función lineal, el parámetro que multiplica el ingreso inicial será menor que si la estimamos para un periodo de 20 años, por la duración del periodo. Para no tener este problema se estima el

[17] El valor de σ^2 cuando $\sigma^2_t = \sigma^2_{t-1}$ para todo t.

[18] De acuerdo a Sala i Martin (2000), aunque algunos autores como Quah, sostienen que β convergencia es irrelevante, en realidad tiene importancia. Si β convergencia nos indica que los países pobres crecen muy rápido, pronto dejaran de serlo, independientemente de la dispersión del producto que en ese momento se observe, ya que sabemos que en poco tiempo saltarán de la pobreza. Por lo tanto beta convergencia tiene importancia.

parámetro β directamente, para que sea independiente de la duración del periodo de estimación, T.

3) Esta ecuación predice el modelo neoclásico.